

## THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SOLUTIONS 1

**Exercice 1.** *Le groupe des permutations  $S_n$*

(1) (a) (135)(24)

(b) (12356)

(c) (62)(5431)

(2) Soit  $x \in \{1, \dots, n\}$  et considérons le cycle  $(x, a(x), a^2(x), \dots, a^{l-1}(x))$ . Comme  $a^p = 1$ , nous devons avoir  $l|p$ , mais  $p$  est premier, donc nous en déduisons  $l = 1$  ou  $l = p$ . Ainsi, tout  $x \in \{1, \dots, n\}$  est soit fixé par  $a$ , soit contenu dans un cycle de longueur  $p$ , ce qui prouve l'assertion.

(3) (a) Il est facile de voir qu'un cycle  $(x_1 x_2 \dots x_l)$  peut être écrit comme un produit de transpositions de la manière suivante :

$$(x_1 x_2 \dots x_l) = (x_1 x_l)(x_1 x_{l-1}) \dots (x_1 x_2)$$

Nous concluons par le fait que toute permutation peut être écrite comme un produit de cycles.

(b) *Lemme* : Si  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  sont des transpositions telles que  $1 = \sigma_1 \dots \sigma_r$ , alors  $r$  est pair.

En observant que

$$\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_k = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \dots \cdot \pi_l$$

$\iff$

$$1 = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_k \cdot \pi_l \cdot \pi_{l-1} \cdot \dots \cdot \pi_1$$

le lemme ci-dessus nous permet de conclure.

*Preuve du lemme* : Clairement,  $r \neq 1$ . Si  $r = 2$ , nous avons terminé. Supposons que  $r > 2$  et procédons par induction. Comme  $(ij) = (ji)$ ,  $\sigma_{r-1} \cdot \sigma_r$  peut être exprimé sous l'une des formes suivantes à droite :

$$1 = (ab)(ab)$$

$$(ab)(bc) = (ac)(ab)$$

$$(ac)(cb) = (bc)(ab)$$

$$(ab)(cd) = (cd)(ab)$$

Si le premier cas se présente, supprimez  $\sigma_{r-1} \cdot \sigma_r$  du produit original. Dans les trois autres cas, nous remplaçons la forme à droite par son équivalent à gauche pour obtenir un nouveau produit de  $r$  transpositions qui nous donne encore l'identité, mais où la dernière occurrence de l'entier  $a$  se trouve dans l'avant-dernier 2-cycle du produit au lieu du dernier 2-cycle. Nous répétons le processus décrit avec le produit

$\sigma_{r-2} \cdot \sigma_{r-1}$ . Comme auparavant, nous obtenons soit un produit de  $(r-2)$  2-cycles égal à l'identité, soit un nouveau produit de  $r$  2-cycles, où la dernière occurrence de  $a$  est dans le troisième 2-cycle à partir de la droite. En poursuivant ce processus, nous devons obtenir un produit de  $(r-2)$  2-cycles égal à l'identité, car sinon nous aurions un produit égal à l'identité dans lequel la seule occurrence de l'entier  $a$  est dans le 2-cycle le plus à gauche, et un tel produit ne fixe pas  $a$ , alors que l'identité le fait. Par induction,  $(r-2)$  est pair, donc  $r$  est également pair.

- (c) Les deux directions de l'énoncé découlent facilement de l'expression d'un cycle en tant que produit de transpositions présentée en (a) et de l'invariance du nombre de termes de cette écriture modulo 2, prouvée en (b).

**Exercice 2.** *Le groupe diédral  $D_{2n}$*

- (1) Rappelons que  $D_{2n}$  est donné par l'ensemble des bijections de  $[n]$  de la forme  $f_k(x) = x + k \pmod n$ , appelées rotations, ou de la forme  $g_k(x) = -x + k \pmod n$ , appelées réflexions. Vous pouvez vérifier que composer ces bijections ou prendre leurs inverses donne toujours une rotation ou une réflexion. Par conséquent, c'est un groupe, et puisque  $D_{2n}$  est inclus dans  $S_n$  avec la même loi de composition, c'est effectivement un sous-groupe.
- (2) Nous avons montré au point précédent que  $D_6 \leq S_3$ , et puisque les deux côtés ont la même cardinalité, l'inclusion doit être un isomorphisme.
- (3) Soit  $r$  la rotation  $x \mapsto x + 1 \pmod 3$  et  $s$  la réflexion  $x \mapsto -x \pmod 3$ . Alors pour tout  $f \in D_6$ , qui est de la forme  $x \mapsto x + k$  (resp.  $x \mapsto -x + k \pmod 3$ ) pour un certain  $k \in \{0, 1, 2\}$ , alors  $f = r^k$  (resp.  $f = r^k s$ ).
- (4) Soit  $r$  la rotation  $x \mapsto x + 1 \pmod n$  et  $s$  la réflexion  $x \mapsto -x \pmod n$ .
- (5) Vous pouvez vérifier que  $sr = r^{-1}s \neq rs$ .

Vous devriez vérifier visuellement que  $s$  et  $r$  génèrent  $D_6$  et qu'ils ne commutent pas.

**Exercice 3.** *Quelques autres exemples de groupes.*

- (1)  $G$  est cyclique engendré par  $i$  d'ordre 4. Il est donc isomorphe à  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .
- (2) Les éléments de  $K$  peuvent être écrits comme

$$K = \{e^{2\pi ik} \mid k \in [0, 1)\} = \{e^{2\pi ik} \mid k \in \mathbb{R}\}.$$

Avec cette représentation, la multiplication complexe est  $e^{2\pi ik} e^{2\pi il} = e^{2\pi i(k+l)}$ . L'unité est  $1 = e^{2\pi i0} = e^0$  et l'inverse de  $e^{2\pi ik}$  est  $e^{-2\pi ik}$ .

- (3) Si  $x \in \mathbb{C}$  est tel que  $x^n - 1 = 0$ , alors  $|x|^n = 1$ , ce qui implique que la norme de  $x$  est  $|x| = 1$ . Ainsi, les éléments de  $H$  sont tous contenus dans  $K$ , c'est-à-dire  $H \subseteq K$ . Ces éléments sont précisément

$$H = \{e^{\frac{2\pi ik}{n}} \mid k \in \{0, \dots, n-1\}\}. \quad (1)$$

Vous pouvez vérifier que ce sont toutes des racines  $n$ -ièmes distinctes de l'unité. Comme  $x^n - 1$  est un polynôme de degré  $n$ , il ne peut pas avoir plus de  $n$  racines, ce qui prouve l'égalité (1). De plus, il est facile de vérifier que  $H \subseteq K$  est un sous-groupe, c'est-à-dire que  $H$  est stable par multiplication et prise d'inverses.

**Exercice 4.** *Actions de groupes*

- (1) Nous montrons que  $\text{Stab}_G(x) \subseteq G$  est un sous-groupe de  $G$ . Pour tous  $g, h \in \text{Stab}_G(x)$  et  $x \in X$  :
- (a)  $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x$ , donc  $gh \in \text{Stab}_G(x)$  ;
  - (b)  $g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = x$ , donc  $g^{-1} \in \text{Stab}_G(x)$
- (2) Fixons  $k \in X = \{1, \dots, n\}$ . Son groupe de stabilisateur est l'ensemble des permutations qui fixent  $k$ , que l'on observe être isomorphe à  $S_{n-1}$ . Formellement, cela donne :

$$\text{Stab}_G(k) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(k) = k\} \cong \{\tau \in S_{n-1}\} \cong S_{n-1}.$$

Notez que pour *différents*  $k \in X$ , les sous-groupes  $\text{Stab}_G(k) \cong S_{n-1} \subset S_n$  sont réalisés par *différentes* homomorphismes injectives  $S_{n-1} \rightarrow S_n$ .

- (3) Un calcul direct montre que pour  $x = E_{ij}$ , son sous-groupe de stabilisateur est donné par l'ensemble des matrices inversibles  $A \in GL_n(K)$  telles que

$$A_{ki} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i; \\ 1 & \text{si } k = i. \end{cases}$$

Pour  $x = B$  une matrice inversible,  $AB = B$  implique que  $A = I_n$  est la matrice identité, donc  $\text{Stab}_G(B)$  est le groupe trivial.

- (4) Le groupe de stabilisateur à  $M \in M_n(K)$  est l'ensemble des matrices inversibles  $A \in GL_n(K)$  telles que  $AMA^{-1} = M$ , c'est-à-dire celles pour lesquelles  $AM = MA$ . Comme toute matrice commute avec une matrice diagonale  $M = \lambda I_n$ , on a

$$\text{Stab}_G(\lambda I_n) = GL_n(K).$$

Si  $M$  est une matrice diagonale avec des entrées *distinctes*, un calcul direct montre que son groupe de stabilisateur est le groupe des matrices diagonales inversibles.

- (5) Nous trouvons que

$$\text{Stab}_G(x) = 1 \quad \text{et} \quad \text{Stab}_{\bullet G}(x) = \{g \in G \mid gx = xg\} = Z_G(x).$$

Ce dernier groupe est appelé le *centralisateur* de  $G$  en  $x \in G$ . Calculons-le pour les différents groupes.

Sans perte de généralité, supposons que  $\sigma = (ij) = (12)$ . Le centralisateur de  $(12)$  est constitué de toutes les permutations qui fixent 1 et 2 ou les échantent tout en permutant librement les autres éléments. Ainsi, le centralisateur de  $(12)$  dans  $S_n$  est

$$C_{S_n}((12)) \cong S_2 \times S_{n-2}$$

où  $S_2$  permute 1 et 2, et  $S_{n-2}$  permute les  $n - 2$  éléments restants.

Sans perte de généralité, supposons que  $\tau = (123)$ . Supposons que  $\sigma \in S_n$  soit tel que  $\sigma(k) = l \notin \{1, 2, 3\}$  pour un certain  $k \in \{1, 2, 3\}$ . Alors  $\sigma(123)\sigma^{-1}(l) \neq l = (123)(l)$  ce qui montre que  $\sigma \notin C_{S_n}((123))$ . Ainsi, nous trouvons que le centralisateur de  $(123)$  est constitué de toutes les permutations  $\sigma$  telles que  $\sigma|_{[3]} : [3] \rightarrow [3]$  appartiennent à  $C_{S_3}((123))$  tout en permutant librement les éléments restants  $\{4, \dots, n\}$ . Il est clair que le centralisateur de  $(123)$  dans  $S_3$  est constitué des puissances de  $\tau = (123)$ , c'est-à-dire le sous-groupe  $\langle \tau \rangle = \{1_{S_3}, \tau, \tau^2\} \subset S_3$ . Ainsi, le centralisateur de  $(123)$  dans  $S_n$  est

$$C_{S_n}((123)) \cong C_{S_3}((123)) \times S_{n-3} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times S_{n-3}$$

où  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \langle \tau \rangle$  et  $S_{n-3}$  permute les éléments restants.

Comme  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est abélien, son centralisateur pour tous ses éléments est le groupe lui-même.

- (6) Nous trouvons que  $\text{Stab}_G(0) = C_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et que  $\text{Stab}_G(x) = 1$  pour tout  $x \neq 0$ .

**Exercice 5.** *Quelques actions géométriques*

- (1) Nous montrons d'abord que l'ordre de  $G$  est 24. Fixons un sommet  $v$  du cube et une arête  $e$  qui est adjacente au sommet  $v$ . L'observation clé est qu'une rotation du cube est déterminée par le choix d'envoyer  $v$  vers un sommet  $w$  et  $e$  vers une arête adjacente à  $w$ . Comme il y a 8 sommets sur un cube et 3 arêtes adjacentes à chaque sommet, nous obtenons que  $|G| = 8 \times 3 = 24$ .

Nous montrons maintenant que l'homomorphisme de groupe  $\phi : G \rightarrow S_4$  induit par l'action de  $G$  sur les grandes diagonales est injectif. Soit  $r \in G$  une rotation telle que  $r$  fixe toutes les grandes diagonales du cube. On observe à l'aide d'une analyse cas par cas que cela n'est possible que si  $r$  est la rotation identité. En déroulant la définition de  $\phi$ , cela signifie précisément que  $\phi$  est injectif.

Comme une application injective entre des ensembles de même cardinalité est également surjective, nous obtenons que  $\phi$  est un isomorphisme.

- (2) On observe d'abord que  $D_{12}$  agit bien sur  $S$ , ce qui induit un homomorphisme de groupe  $\psi : D_{12} \rightarrow S_5$ . Remarquons que les seuls éléments de  $D_{12}$  dont l'action fixe toutes les grandes diagonales sont l'identité et la rotation de  $\pi$  radians. Mais la rotation de  $\pi$  radians échange les deux triangles  $T_1$  et  $T_2$ . Ainsi, le seul élément de  $D_{12}$  qui fixe tous les éléments de  $S$  est l'élément identité. Cela implique que  $\psi$  est injectif.